

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ, 8.02.2025
Clasa a VII-a

1. Se consideră numerele raționale pozitive a, b și c care verifică relația: $\frac{a}{c+7} = \frac{b}{a+5} = \frac{c}{b+3} = \frac{1}{1+3^{-3}}$.

a) (3p) Arătați că $a + b + c = 405$.

b) (3p) Dacă $r = \frac{a}{2025-2a} + \frac{b}{2025-2b} + \frac{c}{2025-2c}$ demonstrați că $3 < \frac{1}{r} < 5$.

2. (7p) Demonstrați că, pentru orice număr natural n , numărul $\sqrt{40^n + 25^n}$ este irațional.

3. Fie trapezul $ABCD$ cu $AB \parallel CD, AB > CD, M$ mijlocul lui AC , iar N mijlocul lui BD . Notăm cu Q intersecția dreptei DM cu dreapta AB . Știind că $DM \parallel CN$, arătați că:

a) (3p) $AB = 3 \cdot CD$;

b) (4p) patrulaterul $AQCD$ este un paralelogram.

4. Triunghiul ABC , având $\sphericalangle BAC = 2x^0$, este înscris într-un cerc. Bisectoarea unghiului BAC , intersectează cercul circumscris triunghiului ABC în punctul M , iar punctele N și P sunt mijloacele arcelor AC , respectiv AB . Dreptele MN și MP intersectează laturile AC și AB în punctele E , respectiv F .

a) (3p) Arătați că $\sphericalangle PMN = 90^0 - x^0$;

b) (4p) Demonstrați că, dacă patrulaterul $AEMF$ este un paralelogram, atunci triunghiul ABC este echilateral.

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii.
Timp efectiv de lucru: 3 ore.